OBRASCI
IZ
MATEMATIKE

ZA SREDNJE ŠKOLE PRIREDIO

SLAVOLJUB BRIXY

PROF. DRŽ. POMORSKE AKADEMIJE U BAKRU

II. POPUNJENO IZDANJE

ZAGREB

TISAK I NAKLADA JUGOSLOVENSKE ŠTAMPE D. D.

1 9 2 9.

19778

OBRASCI

IZ

MATEMATIKE

ZA SREDNJE ŠKOLE PRIREDIO

SLAVOLJUB BRIXY

PROF. DRŽ. POMORSKE AKADEMIJE U BAKRU

II POPUNJENO IZDANJE

ZAGREB 1929

JUGOSLOVENSKA ŠTAMPA D. D., ZAGREB MAROVSKA 30

NARUDŽBE PRIMA

JUGOSLOVENSKA ŠTAMPA
D. D.
ZAGREB, MAROVSKA ULICA 30.

Algebra

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

$a^4 + b^4$ ne da se rastvoriti u realne faktore.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Iz $a : b = c : d$ izlazi:

1) $ad = bc$ (glavno svojstvo razmjera).

2) $am : b = cm : d;\ a : bm = c : dm$

3) $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d;\ a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$

4) $a^m : b^m = c^m : d^m$

$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$

5) $a : c = b : d$ (nutarnji se članovi smiju izmijeniti).

$d : b = c : a$ (vanjski se smiju izmijeniti).

$b : a = d : c$ (nutarnji i vanjski smiju se izmijeniti).

6) $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$ ili $b : d$

7) $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \text{(različ. nazivnik).}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \quad \text{(isti nazivnik).}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{am}{b} \cdot \frac{c}{dm} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{am}{bn} \cdot \frac{cn}{dm} = \frac{ac}{bd}$$

Kod množidbe se razlomak krati unakrst, tj. brojnik s nazivnikom, a nazivnik s brojnikom.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{bc} \cdot c = \frac{a}{bc} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a}{b}$$

$$a \cdot \frac{b}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{a}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{am}{b} : \frac{cm}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{bm} : \frac{c}{dm} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{am}{bn} : \frac{cm}{dn} = \frac{ad}{bc}$$

Kod djelidbe se krati paralelno, tj. brojnik s brojnikom, a nazivnik s nazivnikom.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{am}{b} : cm = \frac{a}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{ap}{bp} = \frac{a}{b} \quad \text{(reduciranje razlomka).}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ap}{bp} \quad \text{(raširivanje razlomka).}$$

$$\frac{a}{\infty} = 0, \quad \frac{a}{0} = \infty$$

$a^m = a \cdot a \cdot a \ldots .$ (m-puta kao faktor).

$a^1 = a;\ a^0 = 1;\ 1^n = 1$

$(-a)^{2n} = a^{2n}$ (paran eksponent).

$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$ (neparan eksponent)

$(a - b)^2 = (b - a)^2$

$(a - b)^{2n} = (b - a)^{2n}$

$a^m \cdot a^r = a^{m+r}$

$a^m : a^r = a^{m-r}$

$a^{m+r} = a^m \cdot a^r$

$$a^{m-r} = a^m : a^r = \frac{a^m}{a^r}$$

$(ab)^m = a^m \cdot b^m$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$a^m \cdot b^m = (ab)^m$

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$(a^m)^r = a^{m \cdot r}$ (potenciranje potencije).

$a^{mr} = (a^m)^r = (a^r)^m$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m};\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$a^m \cdot a^{-r} = a^{m-r}$

$a^m : a^{-r} = a^{m+r}$

$$(ab)^{-m} = a^{-m} \cdot b^{-m} = \frac{1}{(ab)^m}$$

$(a^{-m})^{-r} = a^{mr}$

$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt[n]{1} = 1;\ \sqrt[n]{0} = 0$

$\sqrt[2n]{-a^{2n}} = -a$

$\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^r} = (\sqrt[n]{a})^r;\quad \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nr]{a^{pr}}$$

$\sqrt[nr]{a^{pr}} = \sqrt[n]{a^p}$

$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ ne da se staviti pod zajednički *n-ti* korijen!

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^{np}\,b^{r}} = \sqrt[n]{a^{np}} \cdot \sqrt[n]{b^{r}} = a^{p} \cdot \sqrt[n]{b^{r}}$$

Iz $\sqrt[n]{a^n \pm b^n}$ ne da se ništa izvaditi ni staviti pred korijen!

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\,b}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[r]{b} = \sqrt[nr]{a^r\,b^n}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[r]{b} = \sqrt[nr]{\frac{a^r}{b^n}}$$

$$\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}; \quad a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\,.\,\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\,(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \frac{a\,(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

$\sqrt{-1} = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = +1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$; $i^7 = -i$; $i^8 = +1$

(i = Gausova jedinica).

$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

$a + ib$ (= kompleksan broj).

$a + ib$ i $a - ib$ jesu konjugirani kompleksni brojevi; a se zove realna čest, a b imaginarna čest kompleksnog broja.

$$\log (ab) = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^m = m \log a$$

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a = \frac{\log a}{m}$$

Suma ni diferencija ne daju se logaritmirati.

Rješavanje jednadžbi.

Općena pravila. Stepen se uređene jednadžbe prosuđuje po najvišem eksponentu što ga nepoznanica ima. Pod uređenom se jednadžbom ovdje razumijeva da u jednadžbi nepoznanica nije u nazivniku. Svaka jednadžba ima onoliko korijena (rješenja), kolikoga je stepena. Ako jednadžba ima korijene: , , , δ, dade se ona prikazati kao produkt:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = 0,$$

Jednadžba se ne mijenja, ako se na jednoj i drugoj strani jednadžbe obavi ista operacija to jest:

1 ako se jednoj i drugoj strani pribroji ili oduzme isti broj;

2 ako se jedna i druga strana istim brojem pomnoži ili podijeli;

3 ako se jedna i druga strana digne na istu potenciju;

4 ako se iz jedne i druge strane izvadi isti korijen;

5 ako se jedna i druga strana logaritmira ili antilogaritmira;

6 ako se jedna i druga strana diferencira ili integrira.

Odatle izlaze p r a v i l a:

7 članovi (ne faktori!) se jednadžbe prenašaju s jedne strane na drugu s p r o t i v n i m predznakom;

8 s v i m članovima jedne i druge strane jednadžbe smiju se predznaci promijeniti;

9 nazivnici se u jednadžbi uklanjaju tako, da se obje strane njezine pomnože s najmanjim zajedničkim višekratnikom.

10 ako u više članova jednadžbe dolazi ista nepoznanica, treba te članove staviti na jednu stranu i nepoznanicu izlučiti kao zajednički faktor.

11 ako uz nepoznanicu stoji faktor (koeficijenat), treba obje strane jednadžbe pomnožiti s recipročnom vrijednošću toga faktora. Time se dobiva nepoznanica sama.

Na pr.: iz $\frac{a}{b}x = c + d$ izlazi $x = \frac{b}{a}(c + d)$.

12 jednadžba se ne mijenja, ako se obje strane uzmu recipročno. To se pravilo primjenjuje u slučaju, kad nepoznanica dolazi samo u nazivniku.

Na pr.: $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$; odatle:

$\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$ ili $x = a \cdot \frac{c}{b}$.

13 ako se jednadžba svedena na nulu dade napisati kao produkt, naći će se korijeni jednadžbe tako, da se svaki faktor izjednači nuli ($= 0$) i time dobivena jednadžba riješi.

14 ako se obje strane jednadžbe dadu kratiti (dijeliti) s nepoznanicom ili s kojim

izrazom u kojem je nepoznanica, treba nepoznanicu, odnosno taj izraz izjednačiti nuli (= 0), a dobivene jednostavnije jednadžbe riješiti.

Linearna jednadžba ili jednadžba 1. stepena s jednom nepoznanicom je jednadžba u kojoj nepoznanica nije pomnožena sama sobom, nego dolazi u spoju s poznatim brojevima. Ako su ti brojevi prirodni (1, 2, 3, itd.), jednadžba se zove n u m e r i č k a.

Kad je zadana linearna jednadžba s 1 nepoznanicom, treba ukloniti nazivnike, ako ih ima (po pravilu 9.), a zatim sve članove, u kojima je nepoznanica, staviti na jednu stranu jednadžbe (vidi prav. 10 i 11).

Dvije linearne jednadžbe s 2 nepoznanice nemaju člana u kojemu bi dolazio produkt nepoznanica. Rješavaju se tako, da se jedna nepoznanica ukloni, eliminira, pa se time dobije jedna jednadžba s 1 nepoznanicom. U tu svrhu služe 3 metode: *supstitucije, komparacije i jednakih koeficijenata.* Odabire se uvijek ona koja je za zadanu jednadžbu zgodnija tj. koja vodi do rezultata brže.

Kod metode supstitucije izračuna se jedna nepoznanica iz jedne jednadžbe i uvrsti (supstituira) u drugu.

Kod metode komparacije (izjednačivanja) izračuna se jedna nepoznanica iz jedne i iz druge jednadžbe, pa se dobiveni rezultati izjednače (prema principu: dvije su veličine jednake, ako su jednake istoj nekoj trećoj veličini).

Kod metode jednakih koeficijenata, koja se upotrebljava najčešće, načine se koeficijenti ispred one nepoznanice, koju treba eliminirati, jednakim. To se postizava time, da se jedna i druga jednadžba pomnoži najmanjim zajedničkim višekratnikom koeficijenata istih nepoznanica. Iza toga se jednadžbe zbroje ili odbiju, već prema zadanim jednadžbama.

Kod *rješavanja više linearnih jednadžbi s više nepoznanica* ide se za tim, da se eliminira jedna nepoznanica za drugom, dok se ne dođe do jednadžbe s jednom samo nepoznanicom. Kod toga se upotrebljava jedna od rečenih već metoda.

Iracionalna jednadžba je ona jednadžba kod koje nepoznanica dolazi pod korjenom.

Ako su u jednadžbi dva korjena, jedan se stavi na lijevu stranu, a drugi na desnu. Ako je u takvoj jednadžbi samo jedan korjen, on se osami, tj. sve se ostalo metne na drugu stranu.

Eksponencijalna jednadžba je ona jednadžba kod koje nepoznanica dolazi u eksponentu. Neke se dadu riješiti bez logaritmiranja, a neke ne. Kod rješavanja bez logaritmiranja ide se za tim, da se dobije jedna potencija na lijevoj strani, a jedna na desnoj, a obje da imadu istu bazu.

Logaritamska jednadžba je jednadžba, u kojoj ne dolazi x sam, nego njegov logaritam. Izraz na lijevoj strani izrazuje se jednim logaritmom, a isto tako i izraz na desnoj strani. Zatim se riječ *log* ispusti i jednadžba riješi.

Kvadratna mješovita jednadžba svedena na kanonski oblik ima oblik:

$$x^2 + ax + b = 0$$

Rješenje joj je: $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

Svojstva: a) Prvo svojstvo:

$$a = -(x_1 + x_2), \qquad b = x_1 \cdot x_2.$$

Ovdje x_1 i x_2 znače korijene zadane jednadžbe.

b) Drugo svojstvo: Svaka kvadratna jednadžba dade se pisati u obliku produkta:

$$(x - x_1)\ (x - x_2) = 0$$

Simetrične jednadžbe (ili recipročne) jesu one jednadžbe, kojima su koeficijenti (uzevši ih apsolutno) članova, koji simetrično leže, jednaki. Simetrične jednadžbe neparnog stepena i one parnog, kod kojih apsolutni član ima predznak minus, rješavaju se tako, da se skupe članovi koji imaju isti koeficijenat, a onda se jednadžba razdijeli sa zajedničkim faktorom koji je neka funkcija. Taj faktor, kojim se dijeli, stavi se jednak nuli ($= 0$), i to je jedna jednadžba, a druga se dobiva iz preostale jednadžbe. — Jednadžbe parnog stepena, kod kojih apsolutni član ima pozitivan predznak, moraju se razdijeliti sa x^2. Pri tom se uvede nova nepoznanica:

$$x + \frac{1}{x} = y, \text{ dosljedno } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Recipročne se zovu, jer jednadžbi zadovoljavaju također i recipročne vrijednosti njezinih korijena.

Binomne jednadžbe imaju oblik $x^n \pm a = 0$ tj. imaju dva člana, koji moraju stajati na jednoj strani. a se smatra kao n-ta potencija od $\sqrt[n]{a}$ pa se rastavi u faktore. Svaki faktor mora biti jednak nuli.

Trinomne jednadžbe imaju oblik: $x^{2n} + ax^n + b = 0$ t. j. imaju 3 člana na istoj strani. Stavi se $x^n = u$, pa se dobiva kvadratna jednadžba.

Homogene jednadžbe. Dimenzija nekog člana je suma eksponenata promjenljivih x i y. na pr.

x^2 .... ovdje je dimenzija ovog člana: 2
xy ... „ „ „ „ „ $1+1=2$
$5x^2y$ .. „ „ „ „ „ $2+1=3$

Homogene su jednadžbe one u kojima svaki član ima istu dimenziju. Homogena jednadžba 2. stepena ima dimenziju 2. Član, u kojem ne dolazi nepoznanica, zove se apsolutni član. Homogenih jednadžbi ima bez apsolutnog člana i s apsolutnim članom. U homogene jednadžbe uvrštava se nova nepoznanica:

$$u = \frac{y}{x} \text{ ili } y = xu$$

I Ako je jedna od homogenih jednadžbi bez apsolutnog člana, stavlja se supstitucija $y = xu$ u jednadžbu bez apsolutnog člana.

II Ako obje homogene jednadžbe imadu apsolutni član, može se postupati na dva načina: a) Metodom jednakih koeficijenata eliminiraju se apsolutni članovi, pa se dobije homogena jednadžba bez apsolutnog člana, u koju se uvrsti $y = xu$. Na taj se način izračuna u i veza između x i y. Kad se to nađe, uvrsti se y u jednu od zadanih jednadžbi.

b) Obje se zadane jednadžbe međusobno podijele stavivši prije u svaku $y = xu$. Time se dobije jednadžba u kojoj dolazi samo u. Dalje se radi načinom opisanim u a).

Neodređene jednadžbe. Ako su α i β specijalna rješenja jednadžbe $ax + by = c$, onda je općeno njezino rješenje:

$$x = \alpha - bu, \; y = \beta + au.$$

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ili}$$

$$y' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1) $\begin{cases} y = x \\ y' = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = a \\ y' = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = ax \\ y' = a \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = ax^n \\ y' = a \cdot n \cdot x^{n-1} \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = ax + bx + cx + dx \\ y' = a + b + c + d \end{cases}$

6) $\begin{cases} y = (ax + b)(cx + d) \\ y' = a(cx + d) + c(ax + b) \end{cases}$

Općeno: $\begin{cases} y = uv \\ y' = u'v + uv' \end{cases}$

7) $\begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ y' = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ općeno: $\begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ 9) $\begin{cases} y = \sqrt{u} \\ y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{cases}$

10) $\begin{cases} y = \sin x \\ y' = \cos x \end{cases}$ 11) $\begin{cases} y = \cos x \\ y' = -\sin x \end{cases}$

Derivacija funkcije od funkcije:

$y = F(u)$, gdje je $u = f(x)$:

$$y' = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ili } y' = F_u \cdot f'_x$$

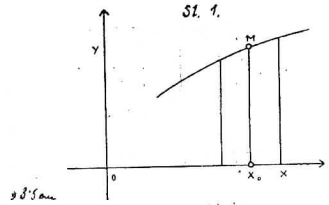
Derivacija implicitne funkcije:

$$F(x, y) = 0$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

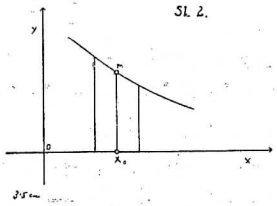
Padanje i rastenje funkcije (slike 1 i 2):

Funkcija u okolišu neke točke x raste, ako derivacija ostaje pozitivna kad x raste.



Slika 1.

Funkcija u okolišu neke točke x pada, ako derivacija ostaje negativna kad x raste.



Slika 2.

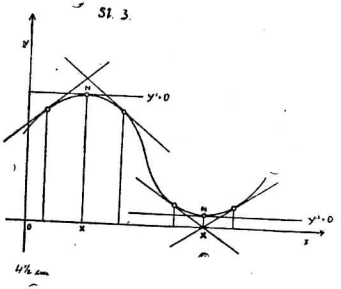
Uvjet je za ekstremne vrijednosti (slika 3):

$$y' = 0$$

Uvjet je za maximum, da derivacija y' mijenja + u — kad x raste.

Uvjet za minimum, da derivacija y' mijenja — u + kad x raste. Ili:

uvjet za maximum: $f''(x) < 0$ } uz $f'(x) = 0$
„ „ minimum: $f''(x) > 0$ }



Slika 3.

Aritmetička progresija je niz brojeva u kojem je diferencija dvaju susjednih članova konstantna. Dakle:

$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2\,d, \ldots$ itd.

$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$

$d = a_n - a_{n-1}$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Interpolacija: $\delta = \frac{d}{r+1}$; $d = b - a$.

Geometrijska progresija je niz brojeva kod kojih je kvocijent dvaju susjednih brojeva konstantan. Dakle:

$b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2 \ldots$ itd.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Interpolacija: $q_1 = \sqrt[r+1]{\frac{a}{b}}$.

Beskonačna geometrijska progresija:

$\sum_{\infty} = \frac{b_1}{1-q}$ konvergentna za $q < 1$
divergentna za $q > 1$

Divergentni nizovi nemaju sume. (Suma im je ∞).

Kamatno-kamatni račun.

I. $C_n = C \cdot q^n$; C je sadašnja vrijednost, C_n konačna vrijednost, a q kamatnjak.

c : 100 = d : p

$q = 1 + \frac{p}{100}$ kod priklapanja jedanput u godini,

$q = 1 + \frac{p}{200}$ kod priklapanja dvaput u godini,

$q = 1 + \frac{p}{100\alpha}$ kod α- kratnoga priklapanja u godini.

$C = \frac{C_n}{q^n}$ (sadašnja vrijednost glavnice).

II. Renta.

$I^n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (u vrijeme zadnje uplate).

$I_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$ (godinu dana iza zadnje uplate).

$C = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (sadašnja vrijednost rente).

$C \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0$ (amortizacija).

Kamati za jednu godinu: $k = \frac{C \cdot p}{100}$.

Integralni račun.

Definicija integrala:

$$\int F(x)dx = \int y dx = \lim_{\Delta x = 0} \sum_{1}^{n} y_k \Delta x.$$

$F(x)$ u integralu $\int F(x)\,dx$ zove se *podintegralna funkcija*. Podintegralna funkcija je derivacija neke funkcije koja se zove *primitivna*. Integrirati reći će tražiti primitivnu funkciju podintegralne funkcije.

1) $\int ax^n\,dx = a\int x^n\,dx.$

2) $\int (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx = \int ax^3\,dx + \int bx^2 dx + \int cx\,dx + \int d.\,dx.$

3) $\int x^n\,dx = \frac{x^{u+1}}{n+1} + C.$

4) $\int \sqrt[n]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C =$

$= \frac{n}{1+n} \cdot x^{\frac{1+n}{n}} + C.$

5) $\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + C.$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} + C.$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \int x^{-\frac{1}{n}} dx = \frac{n}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}} + C.$

8) $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

9) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

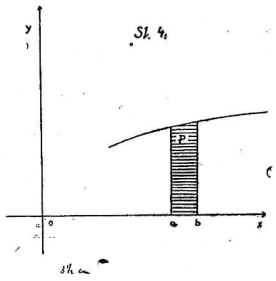
10) Određeni integral: $\int_a^b F(x)\,dx = F(b) - F(a).$

11) $\int_a^b x^n \, dx = \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{1}{n+1} \left| x^{n+1} \right|_a^b =$

$$= \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Određen se integral izračuna tako, da se u primitivnu funkciju uvrsti gornja granica i donja granica, pa se jedno od drugoga odbije.

Geometrijska interpretacija integrala. Integral neke funkcije znači površinu lika što ga omeđuje X-os, krivulja predočena tom funkcijom i ordinate na mjestima donje i gornje granice tj. $\int_a^b F(x)\,dx$ znači površinu P lika, što ga omeđuju ordinate na mjestima $x = a$ i $x = b$, komad luka krivulje $F(x)$ što leži među tim ordinatama i X-os. **(sl. 4).**



Slika 4.

Kombinatorika.

Permutacije. n elemenata daje $P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n = n!$ (faktoriel) permutacija bez ponavljanja.

Kombinacije.

$$K_r(n) = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}.$$

Varijacije. $V_r(n) = \binom{n}{r} \cdot r!$

Svojstva binomnih koeficijenata.

1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$; n. pr. $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$.

2) $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$; n.pr. $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$.

3) $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$.

Binomni (Njutnov) poučak:

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \ldots\ldots\ldots \pm \binom{n}{n} a^0 b^n .$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots + x^n .$$

$$a_r = \binom{n}{r-1} a^{n-(r-1)} b^{r-1}.$$

Račun vjerojatnosti.

Matematička vjerojatnost: $v = \frac{p}{m}$.

$v = 1$ ..... događaj siguran;

$v = \frac{1}{2}$ ..... „ dvojben;

$v < \frac{1}{2}$ ..... događaj nevjerojatan;

$v > \frac{1}{2}$ ..... „ vjerojatan;

$v = 0$ ..... „ nemoguć.

Zbroj vjerojatnosti i protivne vjerojatnosti istoga događaja jednak je 1; tj. $v + v' = 1$.

Totalna vjerojatnost (»ili-ili«) $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \ldots\ldots\ldots$

Složena vjerojatnost (»i-i«) $v = v_1 . v_2 . v_3 . v_4 \ldots\ldots\ldots$

Vjerojatnost da će se r puta za redom ponoviti isti međusobno nezavisni događaj: $v = v_1^r$.

Matematička nada: $N = s . v$ tj. nada = umnošku dobitka i njegove vjerojatnosti.

Cijena srećke jednaka je matematičkoj nadi dobitka.

Ulošci se moraju tako odmjeriti, da matematičke nade obojice igrača budu jednake. Drugim riječima: ulošci moraju biti proporcionalni s vjerojatnosti dobitka.

Pravila kod logaritmiranja brojeva.

1. $\log 174{\cdot}76 = 2{\cdot}24229 \qquad D = 25$

$$\begin{array}{r} 15 + \\ \hline 2{\cdot}24244 \end{array} \qquad \frac{25 \,.\, 6}{10} = 15$$

Prve četiri znamenke nađu se u tablicama direktno, odredi se karakteristika *(ako ima n cijelih znamenaka, onda je karakteristika n — 1),* zatim se prepišu mantise, a diferencija *D* pomnoži se s petom (odnosno petom i šestom) znamenkom i razdijeli sa 10 (odnosno sa 100). Od toga se uzmu samo cijela mjesta i pribroje zadnjim mjestima mantisa iz tablica.

2. *Antilogaritmiranje.* Neka je $\log x = 4{\cdot}36742$

$$x = 23303' \qquad D = 19$$

$$\begin{array}{r} = 742 \\ 736 - \\ \hline 6 \end{array}$$

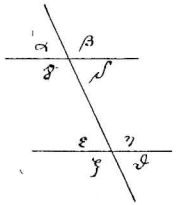
$$60 : 19 = 3{\cdot}2$$
$$30$$

tj. u tablicama se potraže mantise koje su bar manje od zadanih i prepiše se numerus koji pripada tim mantisama, zatim se potraži diferencija $\triangle$ između zadanih mantisa i onih u tablicama. Taj se broj pomnoži sa 10 i razdijeli sa *D*. Dobiveni

broj je peta znamenka numerusa koji se traži. Sad se na koncu odrede cijela mjesta. *Ako je karakteristika u zadatku n, onda nađeni broj ima n + 1 cijelo mjesto.*

Geometrija

Planimetrija.



$\alpha + \beta = 180^0$ (sukuti)
$\beta = \gamma$ (vršni kuti)
$\alpha = \varepsilon$ (protukuti)
$\alpha + \zeta = 180^0$ (prikuti)
$\left.\begin{matrix}\alpha = \vartheta \\ \gamma = \eta\end{matrix}\right\}$ (izmjenični kuti)

Slika 5.

Kutovi su k o m p l e m e n t n i kad im je zbroj 90^0, a s u p l e m e n t n i kad im je zbroj 180^0.

Okomični kutovi (kraci međusobno okomiti) jednaki su onda kad su obadva šiljasta, a suplementi su onda kad je jedan od njih tup.

Simetrala nutarnjega kuta u trokutu dijeli suprotnu stranicu u dva odreska, koji se odnose kao stranice trokuta, koje izlaze iz krajeva tih odrezaka.

Težišnica trokuta je spojnica vrha i raspolovišta suprotne stranice. Težišnice se sijeku u istoj točki (u težištu). Težišnice se sijeku u omjeru 2:1.

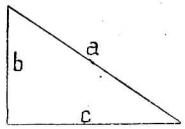
U istokračnom i istostranom trokutu je visina spuštena na osnovicu simetrala osnovice (raspolavlja osnovicu) i simetrala kuta na vrhu (tj. raspolavlja kut).

U istostranom trokutu su sve tri visine jednake i sijeku se u trokutovu težištu, a to je težište ujedno središte upisanog i opisanog kruga.

Ako je ϱ polumjer upisanog, a r polumjer opisanog kruga, v pak visina istostrana trokuta, onda je $\varrho = \frac{v}{3}$, $r = \frac{2}{3} v$.

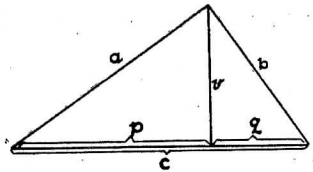
U pravokutnom trokutu, u kojem ima jedan kut 30^0 (a drugi 60^0), kraća je kateta (tj. ona nasuprot kutu od 30^0) polovica hipotenuze.

Svojstva pravokutnog trokuta. 1. Kvadrat hipotenuze jednak je sumi kvadrata na obim katetama, tj. $a^2 = b^2 + c^2$ *(Pitagorin poučak).*



Slika 6.

2. Ako se spusti u pravokutnom trokutu visina na hipotenuzu, onda je svaka kateta srednja geometrij. proporcionala između čitave hipotenuze i projek-



Sl. 7.

cije dotične katete; visina je srednja geometrijska proporcionala između projekcija tih kateta na hipotenuzu tj.:

$$a^2 = p.c;\ b^2 = q.c.;\ v^2 = p.q.$$

Sukladnost trokuta. Dva su trokuta sukladna:

I ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta na njoj.

II ako se podudaraju u dvije stranice i kutu među njima.

III ako se podudaraju u dvije stranice i u kutu nasuprot većoj stranici.

IV ako se podudaraju u sve tri stranice.

U dva su trokuta homologne stranice one koje leže nasuprot jednakim kutovima. Homologni su kutovi oni koji leže nasuprot jednakim stranicama. U sukladnim su trokutima homologni dijelovi (tj. stranice i kutovi) jednaki.

Sličnost trokuta. Dva su trokuta slična:

I ako su dva kuta jednog trokuta jednaka sa dva kuta drugoga.

II ako su dvije stranice jednog trokuta proporcionalne s dvije stranice drugoga, a kutovi među tim stranicama u oba trokuta jednaka.

III ako su dvije stranice jednog proporcionalne s dvjema drugog trokuta, a kutovi nasuprot većim stranicama u oba trokuta jednaki.

IV ako su tri stranice jednoga trokuta proporcionalne s tri stranice drugoga trokuta.

Ako su dva trokuta slična, onda su homologne stranice proporcionalne.

U sličnim se trokutima visine spuštene na homologne stranice odnose kao dvije homologne stranice.

Opsezi sličnih mnogokuta odnose se kao dvije homologne stranice.

Polumjer kružnice upisane trokutu:

$$\varrho = \frac{p}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$ gdje p znači površinu trokuta.

Polumjer kruga opisanog trokutu:

$r = \frac{abc}{4p}$, gdje p znači površinu trokuta.

Obodnični kut jednak je polovici centričkoga kuta, koji pripada istom luku, tj.

$$\varphi = \frac{\psi}{2},$$

Obodnični kutovi su nad jednakim ili istim tetivama istoga kruga jednaki.

Periferija (opseg) kruga jednaka je $2r\pi$, a površina je $r^2\pi$; $\pi = 3{,}14159$.

Kut pravilnog mnogokuta jednak je

$$\frac{2R(n-2)}{n}, \quad (R = 90^0)$$

Centrički kut pravilnog mnogokuta jest

$$\frac{4R}{n}$$

Centrički kut pravilnog peterokuta ima 72^0.

Tangente povučene iz točke izvan kruga na taj krug imaju dužine između točke i dotačišta jednake tj. $t_1 = t_2$.

Zlatni rez.

Slika 8.

$s^2 = r\,(r - s)$.

Točka C dijeli zadanu dužinu r po zlatnom rezu onda kada je veći odrezak srednja geometrijska proporcionala između čitave dužine i manjega odreska.

Stranica upisanih pravilnih mnogokuta.

$$s_3 = r\sqrt{3}$$

$$s_4 = r\sqrt{2}$$

$$s_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$s_6 = r$$

$$s_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Stranica opisanog n-terokuta, ako je zadana stranica upisanog n-terokuta.

$$S_n = s_n \frac{r}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}};$$

$$S_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Stranica upisanog n-terokuta sa dvaput više stranica, ako je zadana stranica upisanog n-terokuta:

$$s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}.$$

Dužina *kružnog luka*: $l = \frac{\alpha r \pi}{180}$, gdje mora α biti izražen u stupnjevima.

Površine.

Trokut: poluprodukt osnovice i visine tj. $p = \frac{b \cdot v}{2}$

Površina istostranog trokuta jest:

$p = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, a visina $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Heronov poučak. Površina trokuta:

$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Upotrebljava se kad su zadane s v e t r i s t r a n i c e trokuta.

$v_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; v_a znači visinu spuštenu na stranicu a.

$s = \frac{a+b+c}{2}$ (polovica opsega trokuta).

Površine sličnih mnogokuta odnose se kao kvadrati homolognih stranica:

$$P_1 : P_2 = a_1^2 : a_2^2$$
$$= b_1^2 : b_2^2$$
$$= c_1^2 : c_2^2 \text{ i t. d.}$$

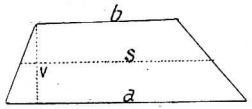
Paralelogram: produkt osnovice i visine tj. $p = b.\ v.$

Pravokutnik: produkt osnovice i visine tj. $p = b.\ v.$

Kvadrat: kvadrat stranice t. j. $p = a^2$; dijagonala: $d = a\sqrt{2}$.

Četverokuti u kojima su dijagonale međusobno okomite (romb, kvadrat, deltoid): poluprodukt dijagonala tj. $= \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Trapez:



Slika 9.

produkt srednjice (s) i visine tj.

$$p = s \cdot v;\ s = \frac{a+b}{2}.$$

Površina pravilnog mnogokuta jednaka je ili sumi ploština svih sukladnih trokuta,

u koje se on raspada, ili polovici opsega mnogokuta puta polumjer tomu mnogokutu upisanog kruga tj.

$$p = \frac{O}{2} \cdot \varrho.$$

Polumjer kruga upisanog u mnogokut jednak je $\varrho = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$; ovdje je r polumjer mnogokuta opisanog kruga, a s_n stranica mnogokuta.

Površina kružnog vijenca:

$$p = R^2\pi - r^2\pi$$
$$p = \pi(R^2 - r^2)$$
$$p = \pi(R + r)(R - r).$$

Površina kružnog isječka:

$$p = \frac{l \cdot r}{2} \text{ ili } p = \frac{\alpha r^2 \pi}{360}.$$

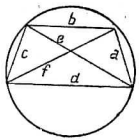
Površina isječka kružnog vijenca:

$p = \frac{l + l_1}{2} \cdot š$ upotrebljava se kad su zadani lukovi i širina $š$ ili

$p = \frac{\alpha \pi š}{360}(R + r)$; upotrebljava se kad su zadani kut, širina $š$ i polumjeri.

Površina lika omeđena kakvom krivuljom: vidi str. 25.

Ptolomejev poučak: U tetivnom četverokutu produkt dijagonala jednak je sumi produkata suprotnih stranica, tj. $ef = ac + bd$.



Slika 10.

U *tetivnom* su četverokutu suprotni kutovi suplementarni.

U tangencijalnom je četverokutu zbroj suprotnih stranica jednak.

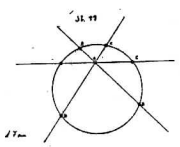
Pramen zraka tvore pravci koji prolaze istom točkom, v r h o m p r a m e n a. Ako se dvije zrake pramena presijeku s dvije usporednice, onda se:

1 odresci na jednoj zraci odnose kao homologni (jednako namješteni) odresci na drugoj zraci;

2 odresci na usporednicama odnose kao odresci na jednoj od zraka, uzevši odreske od vrha pramena do usporednica (ili kraće: odnose se kao njihove udaljenosti od vrha pramena).

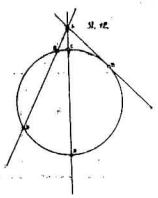
Kružnica i pramen. Ako se pramen zraka presiječe kružnicom koja ne prolazi

vrhom pramena, tada je produkt obiju odrezaka bilo na kojoj zraci konstantna veličina; taj se produkt zove p o t e n c i j a točke S s obzirom na kružnicu. Polovina tetive koja prolazi vrhom pramena okomito na dijametar koji također prolazi vrhom pramena srednja je geometrijska proporcionala između oba odreska bilo koje zrake (sl. 11) tj.



Slika 11.

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SE}^2.$$



Slika 12.

$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SE}^2$ tj. dužina tangente, koja ide vrhom pramena, srednja je geometrijska proporcionala između obadva odreska makar koje sekante koja prolazi vrhom pramena (sl. 12).

Stereometrija.

Oplošje jednako je sumi površina svih pobočaka.

Volumen jednak je produktu baze i visine kod svih tjelesa koja nijesu šiljasta osim kugle.

Volumen šiljastih tjelesa i kugle jednak je trećini umnoška baze i visine.

Prizma: $O = 2B + P$; $V = Bv$.

Pravokutni paralelepiped:

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (a, b, c su bridovi);

$O = 2(ab + ac + bc)$; $V = abc$.

Kocka $D = a\sqrt{3}$, $O = 6a^2$; $V = a^3$

Valjak: $O = 2r\pi(r + v)$;

$P = 2r\pi v$ (plašt);

$V = r^2\pi v$.

Istostran valjak: $O = 6r^2\pi$;

$V = 2r^3\pi$.

Piramida: Pravilna n-terostrana piramida ima bazu pravilan n-terokut.

$$O = B + P; \quad V = \frac{B \cdot v}{3}.$$

Krnja piramida: Baze se odnose kao kvadrati njihovih udaljenosti od vrha. Visina dopunjka:

$$x = v\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$$

$$O = B_1 + B_2 + P;\ V = \frac{v}{3}\left[B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right].$$

Stožac: $O = r\pi(r + s)$, (*s* je stranica stošca). $V = \frac{r^2\pi v}{3}$; $P = r\pi s$ (plašt).

Krnji stožac: Visina dopunjka

$$x = v\,.\frac{r_2}{r_1 - r_2};\ O = \pi\left[r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2)\,s\right]$$

$$V = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

Kugla: $O = 4r^2\pi$; $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

Zona: $O = 2r\pi v$.

Kalota: $O = 2r\pi v$; $O = s^2\pi$

Težina tijela: $T = V.\,s$, gdje V znači volum, s specifičnu težinu, a T apsolutnu težinu tijela.

$\sqrt{2} = 1{\cdot}41421$

$\sqrt{3} = 1{\cdot}73205$

$\sqrt{5} = 2{\cdot}23607$

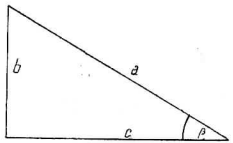
$\pi = 3{\cdot}141593$

Kavaljerov poučak:

Prerežemo li dva tijela iste visine s dvije paralelne ravnine, pa dobiveni presjeci imadu jednake plošine, volumi su tih tijelesa jednaki.

Trigonometrija.

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{b}{a} \\ \cos\beta &= \frac{c}{a} \\ tg\,\beta &= \frac{b}{c} \\ cotg\,\beta &= \frac{c}{b} \\ \hline cosec\,\beta &= \frac{a}{b} \\ sec\,\beta &= \frac{a}{c} \end{aligned}\right\}$$



Slika 13,

Definicije.

$$cotg\,\beta = \frac{1}{tg\,\beta};$$

$$cosec\,\beta = \frac{1}{\sin\beta};\ sec\,\beta = \frac{1}{\cos\beta}.$$

Jedna kateta jednaka je 1. hipotenuzi puta sinus kuta koji je toj kateti nasuprot ili puta cozinus kuta koji je uz tu katetu.

2. Jedna kateta jednaka je drugoj kateti puta tangens kuta koji je toj (traženoj) kateti nasuprot ili puta cotangens kuta koji je uz tu (traženu) katetu.

$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha},\quad cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha};$$

$$sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1;$$

$$sin\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\ \alpha},$$

$$cos\ \alpha = \sqrt{1 - sin^2\ \alpha},$$

$$tg^2\ \alpha + 1 = sec^2\ \alpha,$$

$$cotg^2\ \alpha + 1 = cosec^2\ \alpha,$$

$$sin\ \alpha = \pm \frac{tg\ \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$$

$$cos\ \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$$

Funkcija kuta prvoga kvadranta jednaka je konfunkciji komplementnog kuta. Komplementni su kutovi $(90 - \alpha)$ i α.

Funkcije kuta u drugom kvadrantu jednake su funkcijama suplementnih kutova.

Suplementni su kutovi $(180 - \alpha)$ i α ili $(90 + \alpha)$ i $(90 - \alpha)$

Funkcije kutova trećeg kvadranta, a ti su $180 + \alpha$, jednake su istoimenim funkcijama kuta α.

Funkcije kutova četvrtoga kvadranta, a ti su $360 - \alpha$, jednake su istoimenim funkcijama kuta α.

$$\left.\begin{aligned} sin\ (90 - \alpha) &= cos\ \alpha \\ cos\ (90 - \alpha) &= sin\ \alpha \\ tg\ (90 - \alpha) &= cotg\ \alpha \\ cotg\ (90 - \alpha) &= tg\ \alpha \end{aligned}\right\} \text{I. kvadr.}$$

$$\left.\begin{aligned} sin\ (180 - \alpha) &= +\ sin\ \alpha \\ cos\ (180 - \alpha) &= -\ cos\ \alpha \\ tg\ (180 - \alpha) &= -\ tg\ \alpha \\ cotg\ (180 - \alpha) &= -\ cotg\ \alpha \end{aligned}\right\} \text{II. kvadr.}$$

$$\left.\begin{aligned} sin\ (90 + \alpha) &= +\ cos\ \alpha \\ cos\ (90 + \alpha) &= -\ sin\ \alpha \\ tg\ (90 + \alpha) &= -\ cotg\ \alpha \\ cotg\ (90 + \alpha) &= -\ tg\ \alpha \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(180+\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(180+\alpha) &= -\cos\alpha \\ tg(180+\alpha) &= +tg\,\alpha \\ cotg(180+\alpha) &= +cotg\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{III. kvadr.}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(360-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(360-\alpha) &= +\cos\alpha \\ tg(360-\alpha) &= -tg\,\alpha \\ cotg(360-\alpha) &= -cotg\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{IV. kvadr.}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= +\cos\alpha \\ tg(-\alpha) &= -tg\,\alpha \\ cotg(-\alpha) &= -cotg\,\alpha \end{aligned}\right\} \text{Negativni kutovi.}$$

Funkcije	I.	II.	III.	IV.
Sinus	+	+	−	−
Cosinus	+	−	−	+
Tangens	+	−	+	−
Cotangens	+	−	+	−

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,.\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,.\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,.\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2\,tg\,\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\,.\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\,.\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\,.\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\,.\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Funkc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	$1\|_2$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$1\|_2$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0
cotg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\infty$	0	∞

Kosokutni se trokuti rješavaju pomoću: 1 sinusovog poučka, 2 kozinusovog poučka, 3 pomoću Molveideovih jednadžbi i 4 pomoću tangensovog poučka.

Sinusov poučak:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Kozinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma.$$

Transformirani kozin. poučak:

$$a = \frac{b-c}{\cos\varphi};\ tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{bc}\sin\frac{\alpha}{2}}{b-c}$$

$$b = \frac{a-c}{\cos\varphi};\ tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{ac}\sin\frac{\beta}{2}}{a-c}$$

$$c = \frac{a-b}{\cos\varphi};\ tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{ab}\sin\frac{\gamma}{2}}{a-b}$$

Molveideove jednadžbe:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \quad \text{I.}$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \quad \text{II.}$$

Tangensov poučak:

$$(a+b) : (a-b) = tg\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{ili} = cotg\frac{\gamma}{2} : tg\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Rješavanje četvrtoga slučaja sukladnosti:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$ gdje ϱ znači polumjer trokutu upisane kružnice.

Sinusov, kozinusov poučak, Molveideove jednadžbe i tangensov poučak upotrebljavaju se kod kosokutnih trokuta i to:

Sinusov poučak u I i III slučaju sukladnosti.

Kozinusov (transformirani) poučak u II slučaju sukladnosti, kad se traži s a m o stranica.

Molveideove jednadžbe ili *tangensov* poučak u II slučaju sukladnosti.

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$ i t d. u IV. slučaju sukladnosti.

Površina svakoga trokuta:

$$P = \frac{a\,b}{2}\sin\gamma$$

$$= \frac{a\,c}{2}\sin\beta$$

$$= \frac{b\,c}{2}\sin\alpha$$

$$P = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

$$P = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Površina četverokuta, kad su zadane dijagonale i kut među njima: $P = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi.$

Polumjer trokutu opisanog kruga:

$$2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

U svakom je trokutu:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos a + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Goniometrijske jednadžbe. To su jednadžbe, u kojima ne dolazi sama nepoznanica x, nego goniometrijske funkcije od x na pr. *sin* x, *cos* x, *tg* x itd. — Ako u jednadžbi dolazi samo jedna vrsta funkcije na pr. samo *sin* x, zamijeni se ta funkcija sa u, pa se riješi jednadžba. Dolazi li u jednadžbi više različitih gon. funkcija od x, izrazit se moraju sve jednom te istom funkcijom x. Iz $\sin x = 1$ izlazi $x = 90^0$ (jer je $\sin 90 = 1$).

Jednadžba oblika $a \sin x + b \cos x = 0$ rješava se tako, da se podijeli sa *cos* x, pa izlazi $a \, tg \, x + b = 0$ ili $tg \, x = -\frac{b}{a}$.

Jednadžba oblika $a \sin x + b \cos x = c$ rješava se tako, da se podijeli s koeficijentom ispred *sin* x (dakle s a) i stavi $\frac{b}{a} = tg \, \varphi \, u$

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Time prelazi jednadžba u

$$\sin (\varphi + x) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Pomoćni se kut φ izračunava iz $\frac{b}{a} = tg \, \varphi$

Sferna trigonometrija.

Svojstva sfernoga trokuta.

1 Jednakim stranicama leže nasuprot jednaki kutovi i obratno.

2 Većem kutu leži nasuprot veća stranica i obratno.

3 Suma dviju stranica veća je od treće stranice; diferencija dviju stranica manja je od treće stranice.

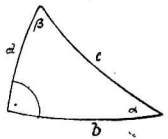
4 Suma dvaju kutova manja je od trećega kuta povećanoga za 180°.

5 Ako je suma dviju stranica $\gtrless$ 180^0, tada je i suma suprotnih kutova $\gtrless$ 180^0 i obratno.

6 Suma svih kutova sfernoga trokuta veća je od 180^0, a manja od 540^0.

7 Suma svih stranica sfernoga trokuta veća je od 0^0, a manja od 360^0.

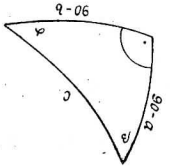
A. Pravokutan trokut.



Slika 14.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$
$$\sin b = \sin c \cdot \sin \beta$$
$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$$
$$tg\ a = tg\ c \cdot \cos \beta$$
$$tg\ b = tg\ c \cdot \cos \alpha$$
$$tg\ b = tg\ \beta \cdot \sin a$$
$$tg\ a = tg\ \alpha \cdot \sin b$$
$$\cos c = cotg\ \alpha \cdot cotg\ \beta$$
$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta$$
$$\cos \beta = \cos b \cdot \sin \alpha$$

Ove se formule pamte pomoću Neperova pravila: *kozinus* svakoga komada jednak je produktu *kotangensa* dvaju obližnjih komada ili produktu *sinusa* dvaju daljnjih komada, pri čemu se pravi kut (90^0) ne uzima u obzir (sl. 15).



Slika 15

Opaska. Kod određivanja rješenja između mogućih mora se uzeti u obzir: ako je $a \gtrless b$, mora biti $a \gtrless$ i obratno.

B. Kosokutan trokut.

Sinusov poučak.

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Kozinusov poučak za stranicu:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha,$$
$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta,$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Kozinusov poučak za kut:

$$\cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a,$$
$$\cos\beta = -\cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \cos b,$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c$$

Transformirani kozinusov poučak za stranicu:

$$\cos a = \frac{\cos b \,.\, \cos(c-\varphi)}{\cos\varphi},\ tg\,\varphi = tg\,b \,.\, \cos a;$$

$$\cos b = \frac{\cos c \,.\, \cos(a-\varphi)}{\cos\varphi},\ tg\,\varphi = tg\,c \,.\, \cos\beta;$$

$$\cos c = \frac{\cos a \,.\, \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi},\ tg\,\varphi = tg\,a \,.\, \cos\gamma.$$

Transformirani kozinusov poučak za kut:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta \,.\, \sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi},\ cotg\,\varphi = tg\,\beta \,.\, \cos\alpha;$$

$$\cos\beta = \frac{\cos\gamma \,.\, \sin(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi},\ cotg\,\varphi = tg\,\gamma \,.\, \cos b;$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha \,.\, \sin(\beta-\varphi)}{\sin\varphi},\ cotg\,\varphi = tg\,\alpha \,.\, \cos c.$$

Ako se stavi $s = \frac{a+b+c}{2}$, bit će

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin c}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin b}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-b)}{\sin a \cdot \sin c}},$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-c)}{\sin a \cdot \sin b}}.$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-a)}},$$

$$tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-b)}},$$

$$tg\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b)}{\sin s \cdot \sin(s-c)}}.$$

Ako se stavi u 3 zadnje formule kratica:

$$tg\,r = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin s}},$$

izlaze formule za rješavanje zgodnije:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{tg\ r}{\sin(s-a)},$$

$$tg\frac{\beta}{2}=\frac{tg\ r}{\sin(s-b)},$$

$$tg\frac{\gamma}{2}=\frac{tg\ r}{\sin(s-c)}.$$

Ako se stavi : $\sigma=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, bit će

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}},$$

$$\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}},$$

$$\sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}},$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}},$$

$$\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}},$$

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}.$$

$$cotg\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)}},$$

$$cotg\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos)\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\beta)}},$$

$$cotg\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos(\sigma-\beta)}{\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\gamma)}},$$

Ako se stavi u 3 zadnje formule kratica :

$$cotg\,\varrho=\sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}},$$

izlaze gornje formule za rješavanje zgodnije

$$cotg\frac{a}{2}=\frac{cotg\,\varrho}{\cos(\sigma-\alpha)},$$

$$cotg\frac{b}{2}=\frac{cotg\,\varrho}{\cos(\sigma-\beta)},$$

$$cotg\frac{c}{2}=\frac{cotg\,\varrho}{\cos(\sigma-\gamma)}.$$

Delambrove (Gausove, Neperove) jednadžbe:

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

O p a s k a. Ove se jednadžbe dobivaju iz p r v e ovako: ako se na lijevoj strani jednadžbe promijeni predznak, na desnoj se promijeni kozinus u sinus, a sinus u kozinus; ako se na lijevoj strani promijene funkcije, na desnoj se promijeni predznak; ako se na lijevoj strani obavi jedna i druga promjena, treba da se obavi jedna i druga promjena na desnoj strani jednadžbe.

Neperove analogije:

$$tg\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot tg\frac{c}{2},$$

$$tg\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot tg\frac{c}{2};$$

$$tg\frac{a+c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cdot tg\frac{b}{2},$$

$$tg\frac{a-c}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cdot tg\frac{b}{2};$$

$$tg\frac{b+c}{2} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \cdot tg\frac{a}{2},$$

$$tg\frac{b-c}{2} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \cdot tg\frac{a}{2};$$

$$tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot cotg\,\frac{\gamma}{2},$$

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot cotg\,\frac{\gamma}{2};$$

$$tg\,\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{a-c}{2}}{\cos\frac{a+c}{2}}\cdot cotg\,\frac{\beta}{2},$$

$$tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{a-c}{2}}{\sin\frac{a+c}{2}}\cdot cotg\,\frac{\beta}{2};$$

$$tg\,\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\cdot cotg\,\frac{\alpha}{2},$$

$$tg\,\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\cdot cotg\,\frac{\alpha}{2}.$$

Opaska. Izmijene li se u kojoj od Neperovih analogija grčka slova s latinskima, a latinska s grčkima, mora se kod zadnjega faktora izmijeniti funkcija *tg* u *cotg*, odnosno *cotg* u *tg*.

Primjena poučaka na kosokutan sferni trokut.

1) 2 stranice i kut jednoj od njih nasuprot.
2) 2 kuta i stranica jednom od njih nasuprot.

} sinusov poučak.

1) 3 stranice.
2) 2 stranice i kut među njima.

} Netransformirani kozinusov poučak za stranice.

1) 3 kuta.
2) Stranica i 2 kuta na njoj.

} Netransformirani kozinusov poučak za kutove.

Za logaritmiranje su zgodnije ove formule

i to: Za slučaj: *3 stranice* formula:

$$tg\,\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}}.$$

Za slučaj: *3 kuta* formula:

$$\cot g \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)}}$$

Za slučaj: *2 stranice i kut među njima* (a traže se 2 kuta):

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\cot g\frac{\gamma}{2},$$

$$tg\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\cot g\frac{\gamma}{2}.$$

Za slučaj: *stranica i 2 kuta na njoj* (a traže se 2 stranice):

$$tg\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot tg\frac{c}{2},$$

$$tg\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot tg\frac{c}{2}.$$

L' Huilierova formula:

$$tg\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{tg\frac{s}{2}\cdot tg\frac{s-a}{2}\cdot tg\frac{s-b}{2}\cdot tg\frac{s-c}{2}}.$$

Površina sfernoga dvokuta:

$$P = 4r^2\pi\cdot\frac{a^0}{360^0}$$

Površina sfernoga trokuta:

$$P = \frac{r^2\pi}{180^0}\varepsilon^0 = r^2 arc\,\varepsilon.$$

Sferni eksces: $\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180^0$

$$arc\,\varepsilon = \frac{\varepsilon^0\pi}{180^0}$$

Analitika.

Pravac.

Udaljenost točaka M_1, M_2:

$$a = \sqrt{(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}$$

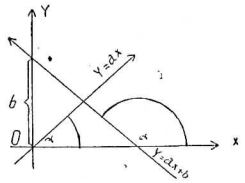
Točka M_1 dijeli pružac M_1M_2 u omjeru $a:b=\lambda$;

$$x = \frac{ax_1+bx_2}{a+b} \text{ ili } x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$y = \frac{ay_1+by_2}{a+b} \text{ ili } y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

Koordinate raspolovišta:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$



Slika 16.

Koeficijent smjera pravca:

$tg\ \alpha = a$

$y = a\,x + b$ .... *jednostavan oblik pravca.*

$y = a\,x$ .... pravac kroz koord. ishodište.

$x = o$ .... jednadžba Y-osi.

$y = o$ .... „ X-osi.

$x = a$ .... pravac paralelan sa Y-osi u udaljenosti a.

$x = b$ .... pravac paralelan sa Y-osi u udaljenosti a.

Općeni oblik: $A\,x + B\,y + C = o.$

Jednadžba pravca kroz točku M_0 *:*

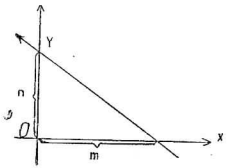
$$y - y_0 = a\,(x - x_0).$$

Jednadžba pravca kroz 2 točke M_1, M_2 *:*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Segmentni oblik pravca (sl. 17):

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$



Slika 17.

Uvjet za paralelizam pravaca: $a_2 = a_1$

Uvjet za okomitost pravaca: $a_2 = -\frac{1}{a_1}$.

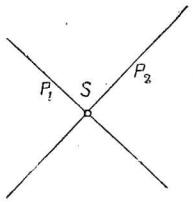
Kut dvaju pravaca :

$$tg\ \varphi = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1\,a_2} \text{ ili } tg\ \varphi = \frac{a_2 - o_1}{1 + a_1\,a_2}.$$

Od tih se formula uzima ona koja daje $tg\ \varphi$ pozitivan.

Sjecište pravaca ili *krivulja* nađe se tako, da se jednadžbe tih pravaca ili krivulja riješe po x i po y.

Jednadžba pramena:



Slika 18.

$$p_1 + \lambda p_2 = 0.$$

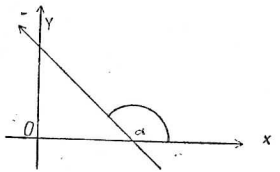
Po ovoj se formuli traži jednadžba pravca koji prolazi sjecištem nekih zadanih pravaca (sl. 18).

Jednadžba pravaca kroz M_0 i kroz sjecište pravaca p_1 i p_2 jest:

$$p_1 p^0_2 - p^0_1 p_2 = o.$$

Heseov normalni oblik jednadžbe pravca:

$-x \sin \alpha + y \cos \alpha + d = o$ gdje α znači kut pravca sa pozitivnom X-osi (sl. 19).



Slika 19.

Općeni oblik jednadžbe pravca transformiran u Heseov:

$$\frac{mx + ny + d}{\pm\sqrt{m^2 + n^2}} = 0.$$

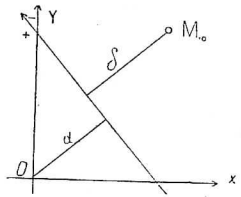
Predznak korjena je isti kao i onaj koeficijenta smjera jednadžbe. Član, u kojemu je y, mora se u jednostavnom obliku prije svega učiniti pozitivnim, ako to već nije.

Treći član ove jednadžbe: $\dfrac{d}{\pm\sqrt{m^2+n^2}}$ *znači udaljenost koordinatnoga ishodišta od pravca (sl. 20).*

Udaljenost točke M_0 od pravca:

$$\delta = \frac{mx_0 + ny_0 + d}{\pm\sqrt{m^2 + n^2}}$$

t. j. udaljenost točke od zadanog pravca (sl. 20) nađe se tako, da se koordinate te točke uvrste u Heseov oblik jednadžbe zadanoga pravca.



Slika 20.

Jednadžbe simetralâ kuta:

$$p_1 \pm p_2 = o.$$

Koji predznak treba uzeti za šiljasti kut, a koji za tupi, treba svaki put odrediti prema predznaku od δ_1 i δ_2.

Jednadžbe krakova p_1 i p_2 moraju biti u normalnom Heseovom obliku.

Površina trokuta:

$$2P = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).$$

Kružnica.

1. *Centrum u ishodištu:* $x^2 + y^2 = r^2$.

Tangenta na tu kružnicu: $x_0x + y_0y = r^2$ *ili* $y - y_0 = y'(x - x_0)$ *gdje su* x_0, y_0 koordinate dotačišta. To je ujedno *jednadžba tangente na svaku krivulju.* U y' se moraju uvrstiti koordinate dotačišta.

Normala na tu kružnicu u točki M_0 (x_0, y_0):

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0) \text{ ili}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0).$$

Posljednja jednadžba vrijedi za *normalu svake krivulje.*

2. *Centrum izvan ishodišta:*
$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, *gdje* p i q znače koordinate središta.

Tangenta na tu kružnicu:

$$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - p)(y - q) = r^2.$$

Normala na tu kružnicu:

$$y - y_0 = \frac{y_0 - q}{x_0 - p}(x - x_0).$$

Općeni oblik jednadžbe kruga:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

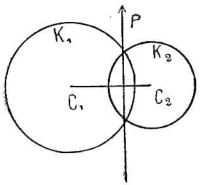
$$p = -\frac{a}{2}; \quad q = -\frac{b}{2};$$

$$r = \sqrt{p^2 + q^2 - c}.$$

$t^2 = (x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 - r^2$, *t. j. kvadrat dužine tangente* iz točke M_0 dobije se tako, da se u jednadžbu kruga svedene na nulu uvrste koordinate x_0, y_0.

$-n^2 = (x_0 - p)^2 + (y_0 - p)^2 - r^2$, t. j. negativan *kvadrat polovice tetive,* koja prolazi točkom M_0 unutar kruga, dobije se tako, da se u jednadžbu kruga svedene na nulu uvrste koordinate x_0, y_0.

Veličine t^2 i $-n^2$ zovu se *potencije točke* s obzirom na krug.



Slika 21.

Geometrijsko mjesto točaka jednakih potencija zove se **potencijala** (kordala ili radikalna os). Njezina je jednadžba: $k_1 - k_2 = 0$.

Ona je normalna na centrali (sl. 21). Sjecište potencijala triju krugova zove se **radikalno središte**.

Pramen kružnica: $k_1 + \lambda k_2 = 0$.

To su krugovi koji prolaze sjecištima krugova k_1 i k_2.

Ako je M_0 pol s obzirom na krug $x^2+y^2=r^2$, onda je *polara* dana s: $x_0x + y_0y = r^2$. — Ako je zadan krug $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$, onda je *polara* $(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2$ gdje su x_0, y_0 koordinate pola M_0. Polara prolazi dotačištima tangenata spuštenih iz pola.

Elipsa.

1 *Centrum u ishodištu:*

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ ili } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tangenta na tu elipsu:

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2,$$

gdje su x_0, y_0 koordinate dotačišta.

Normala na tu elipsu u točki M_0 (x_0, y_0):

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0).$$

Polara: $\Pi \equiv b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$

(x_0, y_0 su koordinate pola).

2 *Centrum izvan ishodišta* u točki C (p, q) (glavni položaj):

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

Tangenta na tu elipsu:

$$\frac{(x_0-p)(x-p)}{a^2} + \frac{(y_0-q)(y-q)}{b^2} = 1.$$

gdje su x_0, y_0 koordinate dotačišta.

Normala na tu elipsu u točki $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = \frac{a^2(y_0 - q)}{b^2(x_0 - p)} \cdot (x - x_0).$$

Polara:

$$\Pi \equiv \frac{(x_0 - p)(x - p)}{a^2} + \frac{(y_0 - q)(y - q)}{b^2} = 1$$ gdje su x_0 i y_0 koordinate pola.

Ekscentriciteta linearna (udaljenost fokusa od središta elipse): $e^2 = a^2 - b^2$.

Ekscentriciteta numerička $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Poluparametar: $p = \frac{b^2}{a}$ (polovica tetive kroz fokus).

Duljina vektora: $r_1 = a - \frac{ex}{a}$,

$$r_2 = a + \frac{ex}{a}.$$

Hiperbola.

1 *Centrum u ishodištu:*

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ ili } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tangenta na tu hiperbolu:

$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ gdje su x_0, y_0 koordinate dotačišta.

Normala na tu hiperbolu u točki M_0 (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0).$$

Polara: $\Pi \equiv b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ gdje su x_0, y_0 koordinate pola.

Jednadžba asimptota: $y = \pm \frac{b}{a}x$.

2 *Centrum izvan ishodišta* u točki $C\ (p, q)$

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} - \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1.$$

Tangenta na tu hiperbolu:

$$\frac{(x_0 - p)(x - p)}{a^2} - \frac{(y_0 - q)(y - q)}{b^2} = 1$$

gdje su x_0, y_0 koordinate dotačišta.

Normala na tu hiperbolu u točki M_0 (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{a^2(y_0 - q)}{b^2(x_0 - p)}(x - x_0).$$

Polara:

$$\Pi \equiv \frac{(x_0 - p)(x - p)}{a^2} - \frac{(y_0 - q)(y - q)}{b^2} = 1$$ gdje su x_0 i y_0 koordinate pola.

Jednadžba asimptota:

$$(y - q) = \pm\frac{b}{a}(x - p).$$

Ekscentriciteta linearna: $e^2 = a^2 + b^2$.

„ *numerička:* $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Polu-parametar: $p = \frac{b^2}{a}$ (polovica tetive kroz fokus).

Istostrana hiperbola ima: $a = b$.

Jednadžba istostrane hiperbole: $x^2 - y^2 = a^2$.

Tangenta istostrane hiperbole:

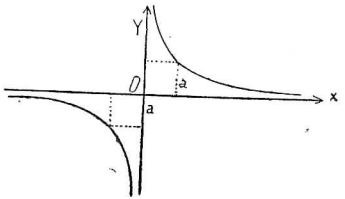
$x_0x - y_0y = a^2$ gdje su x_0, y_0 koordinate dotačišta.

Normala istostrane hiperbole u točki M_0 (x_0, y_0):

$$yy_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0).$$

Istostrana hiperbola, kojoj su koordinantne osi asimptote: (sl. 22)

$$xy = a^2.$$



Slika 22.

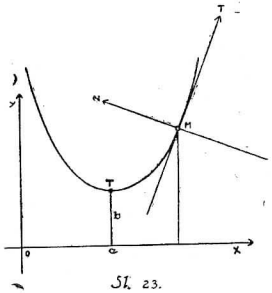
Parabola.

Jednadžba parabole kojoj je os paralelna s *Y*-osi: $y = ax^2 + bx + c$, ili $y = k(x - a)^2 + b$ gdje su a i b koordinate tjemena (sl. 23).

Jednadžba parabole, kojoj je *os simetrije pozitivna Y-os,* a tjeme u koord. ishodištu: $y = ax^2$.

Ako je p poluparametar, onda se ta jednadžba dade pisati: $y = \frac{x^2}{2p}$.

Ako je a^2 u tim jednadžbama *negativan*, grana krivulje ide *dolje*.



Sl. 23.

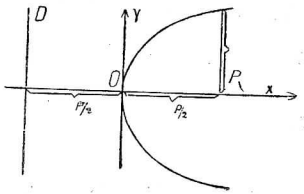
Slika 23.

Tangenta tih parabola: $y - y_0 = y'(x - x_0)$, gdje su x_0, y_0 koordinate dotačišta M. U y' se moraju uvrstiti koordinate dotačišta (sl. 23).

Normala tih parabola u točki $M_0\ (x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0).$$

Tjemena jednadžba parabole kojoj je os simetrije X-*os* a tjeme u koord. ishodištu: $y^2 = 2px$ (sl. 24).



Slika 24.

Tangenta na tu parabolu: $y_0 y = p(x_0 + x)$, gdje su x_0, y_0 koordinate dotačišta.

Polara na tu parabolu:

$\Pi \equiv y_0 y = p\,(x_0 + x)$; pol je (x_0, y_0).

Normala na tu parabolu u točki M_0 (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0).$$

Parabola s tjemenom u točki (a, b), ako je os simetrije parabole paralelna s X-osi:

$$(y - b)^2 = 2p\,(x - a).$$

Tangenta na nju:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0 - b}(x - x_0),$$

gdje su x_0, y_0 koordinate dotačišta.

Tjemene jednadžbe.

Kružnica: $y^2 = 2px - x^2$.

Elipsa: $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$.

Hiperbola: $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$.

Parabola: $y^2 = 2px$.

Ako je zadana točka (pol) *izvan* bilo kojega *čunjosjeka K*, nađu se *tangente kroz tu točku* pomoću: $C\sqrt{K_0} = \pm r(\Pi - K_0)$. Kod svih krivulja osim kruga je $r = 1$.

Ovdje je K_0 rezultat supstitucije koordinata zadane točke u lijevu stranu jednadžbe krivulje; Π je lijeva strana neskraćene jednadžbe polare u kojoj se predznaci ne smiju mijenjati; C je lijeva strana jednadžbe pravca položenoga središtem krivulje i polom — svedene na *općeni* oblik.*)

Ova se vrsta zadataka može izrađivati također i pomoću uvjetnih jednadžbi.**)

* Vidi: Nastavni Vjesnik 1921., sv. 9. i 10., str. 422.
** Vidi: Nastavni Vjesnik 1925., sv. 5. i 6., str. 206.

Jednadžbi pravca kroz zadanu točku (pol) treba tada dati oblik $T \equiv Ax + By + C = 0$.

Ako se kod kružnice, elipse i hiperbole uvrste u lijevu stranu izraza T koordinate središta tih krivulja, a kod parabole koordinate tjemena, dobit će se vrijednost T_c. Prema tome dobit će se uvjetne jednadžbe u ovim oblicima:

Uvjetna jednadžba za tangente povučene iz točke izvan:

1a) *kružnice* $x^2+y^2=r^2$ jest: $r^2(A^2+B^2)=C^2$;

1b) *kružnice* $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ *jest:*
$r^2(A^2+B^2)=T_c^2$;

2a) *elipse* $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ jest $A^2a^2+B^2b^2=C^2$;

2b) *elipse* $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ jest:
$A^2a^2+B^2b^2=T_c^2$;

3a) *hiperbole* $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ *jest:*
$A^2a^2-B^2b^2=C^2$;

3b) *hiperbole* $\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ jest:
$A^2a^2-B^2b^2=T_c^2$;

3c) *istostrane hiperbole* $x^2-y^2=a^2$ jest:
$a^2(A^2-B^2)=C^2$;

4a) *parabole* $y^2=2px$ jest: $pB^2=2AC$;

4b) *parabole* $(y-b)^2=2p\,(x-a)$ jest:

$$\underline{p\,B^2 = 2\,A\,T_c}$$

4c) *parabole* $y=\frac{x^2}{2p}$ jest: $\underline{pA^2 = 2\,BC}$;

4d) *parabole* $y=\frac{(x-a^2)}{2\,p}+b$ jest:

$$\underline{pA^2 = 2\,BT_c}.$$

Ako se jednadžba pravca kroz diralište ne stavi u općeni oblik: $Ax+By+C=0$ nego u jednostavni: $y=Ax+B$, bit će uvjetna jednadžba za tangente na

kružnicu: $x^2+y^2=r^2$

ova: $A^2r^2+r^2=B^2$;

elipsu: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

ova: $A^2a^2+b^2=B^2$;

hiperbolu: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

ova: $A^2a^2-b^2=B^2$;

istostr. hiperbolu: $x^2-y^2=a^2$

ova: $A^2a^2-a^2=B^2$;

parabolu: $y^2=2px$

ova: $2AB=p$.

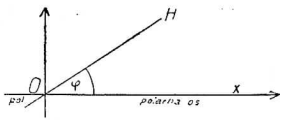
Prelaz iz pravokutnoga koord. sustava u polarni i obratno:

$x=\varrho\cdot\cos\varphi,\ y=\varrho\cdot\sin\varphi;\ \varrho=\sqrt{x^2+y^2},$

$tg\ \varphi=\frac{y}{x}$.

ϱ = radij-vektor,

φ = anomalija (sl. 25).



Slika 25.

Jednadžbe čunjosjeka (krug, elipsa itd.) *u polarnim koordinatama:*

$$\varrho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

p = parametar

$\left\{\begin{array}{ll} \text{za } \varepsilon<1 & \text{elipsa,}\\ ,, \ \varepsilon>1 & \text{hiperbola,}\\ ,, \ \varepsilon=1 & \text{parabola,}\\ ,, \ \varepsilon=0 & \text{kružnica.}\end{array}\right.$

(numerički ekscentricitet) $=\frac{e}{a}$.

Logaritmiranje goniometrijskih funkcija

1) *log sin* $35^0\ 15'\ 17'' =$ $D = 0{\cdot}28$

$= 9{\cdot}76129 - 10$ $0{\cdot}28\ .\ 17$

$5\ +$ 196

$9{\cdot}76124 - 10;\ \triangle = 4{\cdot}76 = 5$

O p a s k a. Kod logaritama funkcija *sin* i *cos* dodaje se uvijek — *10*, a kod logaritama funkcija *tg* i *cotg* dodaje se — *10* samo tamo, gdje je karakteristika 6 ili više.

2) *log cos* $53^0\ 36'\ 27'' =$

$= 9{\cdot}77336$ $D = 0{\cdot}28$

$- 8$ $0{\cdot}27\ .\ 27$

$9{\cdot}77328 - 10$ 196

56

$\triangle = 7{\cdot}56 = 8$

tj. najprije se potraži *log* od stupnjeva i minuta, zatim se *D* pomnoži sa sekundama. Od toga se uzmu samo cijela mjesta i nađenim se mantisama taj broj kod sinusa i tangensa pribroji, a kod kozinusa i kotangensa odbije.

Antilogaritmiranje.

1) *log sin* $x = 9{\cdot}30890 - 10;\ D = 1{\cdot}00$

$- 887$ $3 : 1{\cdot}00 = 3$

$x = 11^0\ 45'\ 3''$ 3

2) *log cos* $x = 9{\cdot}55940 - 10;\ D = 0{\cdot}53$

923

17 $17 : 0{\cdot}52 = 32$

$x = 68^0\ 45'$ ili

$x = 68^0\ 44'\ 60''$

$- 32''$

$x = 68^0\ 44'\ 28''$

tj. logaritam goniometrijske funkcije antilogaritmira se tako, da se u dotičnom stupcu potraže bar manje mantise. Potraži se razlika između zadanih i nađenih mantisa i razdijeli sa *D*. Nađeni broj znači sekunde, koje se kod sinusa i tangensa pribroje, a kod kozinusa i kotangensa odbiju od nađenih minuta.